THE TABLE OF CHORDS AND GREEK TRIGONOMETRY

Stefano Buscherini

Antonio C.D. Panaino [▪]
Dipartimento di Storie e Metodi per la Conservazione dei Beni Culturali
Alma Mater Studiorum Università di Bologna (sede di Ravenna)

Keywords: history of mathematics, numerical systems, antiquity

1. Introduction

The study of ancient mathematical thought, owing to its intrinsic difficulty and requiring both philological and scientific experience, is one of the less favoured areas of our studies, with the exception of a limited number of specialists who work in close-knit circles.

On the contrary, this branch of research is fundamental in better understanding not only the great systems of a philosophical, geographical, astronomical, astrological and architectural (etc.) nature, but also the daily life of the ancients who used calculating procedures that were, at least in some circles, refined.

The conservation of cultural heritage particularly that of Antiquity, cannot therefore disregard the knowledge of both conceptual and practical methods and instruments, on which the calculations of the ancients were based, especially in the case of the Greeks, whose trigonometry is the basis of subsequent developments, starting from the Arabs, who improved some points.

One aspect that is very difficult to discuss, even for mathematics historians (who mainly treat the period from the Middle Ages to the Modern and Contemporary Age), arises from the great difficulty in mastering the practical methods and in knowing the operational rules, which nowadays are outdated and for this reason, not taught either at school or at university.

▪ Corresponding author: e-mail antonio.panaino@unibo.it

This means not only putting aside the calculator or the personal computer, but solving problems using the conceptual and operative instruments that were available to the ancients in order to be able to retrace their steps and understand their difficulties, limits and potentialities.

Therefore, if for modern sciences what is obliterated ends up in an imaginary waste bin, for the historian this "outdated information - 'waste' -" becomes an important source of knowledge that prevents from falling into ridiculous anachronisms or from leaving any scholar completely unarmed before a Greek mathematical text full of numbers and calculations.

Unfortunately it is no accident that the works that try to help the comprehension of the archaic competences, teaching their rules and procedures, are rather inaccessible and often exoteric. From this point of view the work we are presenting wants to fill a gap, which is also and above all didactic (even though it deals with a very specialised didactic that is for a maniple of braves who are really interested in ancient mathematical sciences), because it is assumed that in this field one is self-taught.

This short monograph can almost be considered a Virgil for those who want to venture onto some infernal roads and reach, once they are out of the purgatorial fire, the Paradise of numbers and geometric forms in a celestial sphere, where trigonometry has always had privileged entry.

2. Greek systems of numeration

The development of a numeration system was related to two human needs: transmitting and preserving records and ideas (with respect to numbers) and allowing mental calculations.

Boyer [1] identifies three steps:

- To set up a one-to-one correspondence between the object to be counted and a series of written marks;
- To arrange the marks into easily recognized groups;
- To invent new marks to represent a group of specified numbers.

The Minoic system (first half of the second millennium B.C., Table 1) used the three previous principles. The marks represented only the powers of 10 ($1=10^0$, $10=10^1$, $100=10^2$) with which the remaining numbers were written using a principle of repeating: 3 was represented by three vertical marks ("///") and 13 was the union of the mark for 10 and the unity repeated three times ("**/** ///"). This system was also used, with minor changes, in the "linear A" and "linear B" [2].

Table 1. Cretan numbers.

System of numeration	10^0	10^1	10^2	10^3
Hieroglyph	/ ⌒	◦	/	◇
Linear A	|	◦ —	○	⌖
Linear B	|	—	○	⌖

The Greek Attic or Herodianic system[1] (Table 2) also used the same rules in the inscriptions that go from fifth century B.C. to the beginnings of the Christian era. It added the "acrophonic" principle[2]: 5, 10, 100, 1,000, 10,000 were represented by the first letter of the respective word (Π and subsequently Γ for πέντε, Δ for δέκα, Η for ἑκατόν, Χ for χίλιοι, Μ for μύριοι)[3].

Table 2. Attic or Herodianic system.

|	1
||	2
|||	3
||||	4
Γ	5
Γ|	6
Γ||	7
Γ|||	8
Γ||||	9
Δ	10
ΔΔ	20
𐅄	50
𐅄 Δ	60

𐅄 ΔΔ	70
Η	100
ΗΗ	200
𐅅	500
𐅅 Η	600
Χ	1,000
ΧΧ	2,000
𐅆	5,000
𐅆 Χ	6,000
Μ	10,000
ΜΜ	20,000
𐅇	50,000
𐅇 Μ	60,000

The system used six signs and all other numbers were made up by the juxtaposition, which was based on an additive principle. Some numbers, for example 50 and 500, were represented with the union of two letters, following a multiplicative principle.

Later the Greeks utilized a new numeric system, according to the numerical representation introduced by the Egyptian scribes: in Egypt, in general, the repetition of groups of number signs was avoided using new hieratic and demotic marks (Figure 1) [4]. Nevertheless the Egyptians did not exploit to the full this system, which varied from scribe to scribe and was used especially for the tens and hundreds; for the thousands multiplicative and additive principles were used [1].

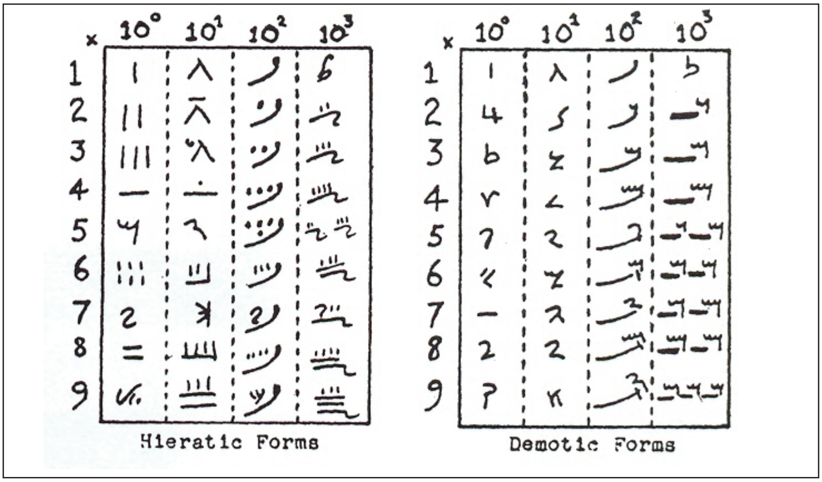

Figure 1. Hieratic and Demotic numeric system [1].

The Greeks understood the potential of the system and developed a new one, called Ionian or Alexandrian, which replaced the previous one around the third century B.C. (Table 3) [5].

In this system the 27 letters were divided into three groups: unity (1-9), tens (10-90) and hundreds (100-900)[6]. The first nine thousands were represented with the first nine letters preceded by a stroke (positioned down or up) that could be omitted where there was no ambiguity[7]. The 10,000 was the beginning of a new category[8], ἡ πρώτη μυριάς or 'first myriad', where a multiplicative principle was used: the figures were written above, before or after the letter M[9].

In addition there were other methods to represent myriads [6]:

- The tens and hundreds were preceded by an accent to represent numbers until 999,999;

Table 3. Alexandrian system.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
1	α	ι	ρ	͵α	M
2	β	κ	σ	͵β	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$
3	γ	λ	τ	͵γ	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$
4	δ	μ	υ	͵δ	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$
5	ε	ν	φ	͵ε	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$
6	ς	ξ	χ	͵ς	$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$
7	ζ	ο	ψ	͵ζ	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$
8	η	π	ω	͵η	$\overset{\eta}{\mathrm{M}}$
9	θ	ϟ	ϡ	͵θ	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$

- The symbol of myriads was followed by Μυ;

- The Μυ was replaced with a dot.

The ‘second myriad’, ἡ δευτέρα μυριάς, power of myriads (10,000^{2}, and so on), was represented in different manners, for example by doubling the letter M.

Before the Roman Empire the Greeks used two or three dots to distinguish numbers from letters of the alphabet or they separated numbers on both sides with a space. Later they usually placed a horizontal stroke above the numbers.

3. Fractions

In writing the “unit fractions” (with unity as numerator[10]), the Greeks represented only the denominator with an accent instead of the horizontal stroke above it[11]. A less orthodox method was to write two accents after the denominator. There were two particular signs, L’ (or *C*’) for 1/2 and ω’ for 2/3 (called τά δύο μέρη, “the two parts”)[12].

The ordinary proper fractions (in which the numerator isn’t unity[13]) were written using various methods [3]:

- The denominator, with the accent, followed the numerator (Archimedes writes ι οα’ for 10/71);

- The denominator was written twice (Heron writes ιγ’ κθ’ κθ’ for 13/29);

- The denominator was written above the numerator (this method is used by Diophantus and is in opposition to the modern one);

- The denominator was written like an exponent of the numerator (above the numerator but slightly to the right);

- The words μόριον (“denominator or divisor”) or ἐν μορίῳ (“divided by”) were inserted between numerator and denominator.

Instead Ptolemy in his *Almagest*’s Table of Chords uses the sexagesimal fractions[14], in which the denominator is 60 and its powers[15]. At the moment it is not clear who was the first to introduce these fractions in the Greek world. According to Ptolemy and his *Almagest*, Hipparchus calculated the length of the synodic month as 29;31,50,8,20[16] days (or $29+31/60+50/60^2$ and so on) using the sexagesimal numeric system, which proves that in the second century B.C. the system had already been adopted[17].

4. Operations

The Greeks called the art of calculation ἡ λογιστική (understood τέχνη), from ὁ λόγος, "calculation" or "discourse", to distinguish it from the theory of numbers, ἡ ἀριθμητική (understood τέχνη), the study of the properties of number. Instead logistics studied arithmetical operations – addition, subtraction, multiplication, division[18] – and problems related to the division of a given amount.

The sum of two numbers (συντιθέναι) was realized placing numbers in separate vertical rows and making the addition.

,αυκδ	1424+
ρ γ	103+
,βσπα	2281+
λ	30=
,γωλη	3838

The subtraction (ἀφαιρεῖν) was performed in the same way.

,γχλϛ	3636-
,γυ θ	3409=
σκζ	227

In the multiplication the multiplicand was written above the multiplier, preceded by the word ἐπί ("by" or "into"). The algorithm was similar to ours: the term containing the highest power of ten in the multiplier was taken and multiplied into all the terms in the multiplicand, in descending order. The same procedure was followed for all terms of the multiplier. Finally the sum was performed.

νγ			53 x		
ἐπὶ νγ			53 =		
,βφ	ρν		2500	150	
	ρν	θ		150	9
,β	ω	θ	2809		

The operation of division was performed as it is today and the quotient was found by trial, multiplying it by the divisor[19].

5. Ancient trigonometry

It is not clear when trigonometry[20] was first used and the question about its founder is still open. Kline [18] links the creation of trigonometry to Hipparchus, Menelaus and Ptolemy, and to the need of ancient astronomy to predict the positions of the heavenly bodies. Boyer [19] in his chapter on "Greek Trigonometry and Mensuration" indicates Hipparchus as the father of trigonometry, specifying that in Book II of Euclid's *Elements* the propositions 12[21] and 13[22] are equivalent to the laws of cosines[23], but they are expressed in a geometric language and bearing in mind that one of Archimedes' theorem on the broken chord may have a trigonometric meaning [19].

In the preface of his *Almagest*'s translation, Halma [20] says that Hipparchus is the founder of trigonometry: "les travaux auxquels ce laborieux astronome se dévouna avec un succès égal à l'amour pour la vérité, que Ptolémée loue en lui, firent naître la trigonométrie"[24]. On the contrary Tannery [21] writes "l'invention de la trigonométrie; elle ne peut être dûe a Hipparque et n'est pas l'oevre d'un seul"[25]. In the chapter on the Alexandrian mathematicians the author considers the beginning of trigonometry and fixes three main moments:

- Archimedes' study of the relationship between the circumference and the diameter from which it was developed the calculus to determine the chords of different archs[26];
- Apollonius' consideration of previous calculations;
- Hipparchus creation of a more precise table of chords than the ones created before him, taking into account the studies of his precedessors[27].

At the beginning of 1900 ,when considering the problem of trigonometry[28], Loria [25] quotes Tannery's opinions and adds "tale schizzo storico sulla genesi della trigonometria contiene molti elementi ipotetici, che il lettore ravviserà tosto, anche senza il nostro aiuto; tuttavia presenta indiscutibili caratteri di verosimiglianza che auguriamo possano accrescersi con ulteriori ricerche".

More cautious than his predecessors is Heath [3][29] who on trigonometry writes "even if he did not invent it, Hipparchus is the first person of whose systematic use of trigonometry we have documentary evidence": there is an assertion of Theon that attributes to Hipparchus a treatise on the chords; a statement of Pappus from which we obtain that Hipparchus used trigonometric tables and finally his work *Commentary on the Phaenomena of Eudoxus and Aratus*[30].

Neugebauer [28] also considers this problem, stating that “Aristarchus’ discussion of the solution of one right triangle demonstrates the absence of a systematic trigonometry before Hipparchus”[31] and proving the connections between Hipparchus’ table of chords and the Indian tables of sine[32]: “I have very little doubt that these tables are nothing but the transformation of the Hipparchian table of chords to a table of sines”.

Recently Toomer [22] has investigated a possible method used by Hipparchus for the construction of his table, while van der Waerden [34], even if he accepts Toomer’s arguments, writes that “who invented trigonometry? … His name is Apollonius of Perge”.

From a different perspective Szabo and Maula [23] state in their book, that the tables of chords came at the end of the history of Greek trigonometry and that it is likely that before their creation single calculus were made to find the chord of an angle[33]. As evidence of this Greek interest on the relationship between the angles and the chords of a circle, there is the assumption “que si l’on réfléchit sérieusement aux cinq propositions du livre III qui viennent d’être citées, on ne pourra s’empêcher de se demander si Euclide n’a pas conçu tout le livre comme une préparation á une table des cordes”.

6. Hipparchus and his table of chords

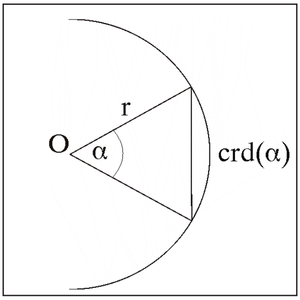

Figure 2. The chord.

The Greeks did not use the modern trigonometrical functions[34], but used the chord (in the sequel abbreviating it by crd(α)), called εὐθεῖα, defined as the segment subtended by the given central angle[35] in a circle in which the radius can be of different lengths (Figure 2)[36].

The tables listed the length for particular angles, while for the ones that were not listed one had to interpolate linearly between two tabulated values.

The sole existing table is in Book I of Ptolemy’s *Almagest*, but there is evidence of a previous study on chords; Theon of Alexandria ascribes to Hipparchus[37E]a work on chords in 12 books: “Δέδεικται μὲν οὖν καὶ Ἱππάρχῳ πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἐν ιβ βιβλίοις, ἔτι τε καὶ Μενελάῳ ἐν ς”, [14] (“an investigation of the chords in a circle is made by Hipparchus in twelve books and again by Menelaus in six”).

According to Toomer [22] 12 books are too many, because in the *Almagest*, work of 13 books, the whole subject is dealt with in only one chapter. The number is probably related to the 12 sections of 30 lines, in which Hipparchus arranged the angles in his table. In spite of his inaccuracy, Theon confirms that Hipparchus developed a table of chords[38].

Table 4. Hipparchus' table reconstructed by Toomer[39].

Angle	Chord
7 ½°	7;30
15°	14;57
22 ½°	22;21
30°	29;39
37 ½°	36;50
45	43;51
52 ½°	50;41
60°	57;18
67 ½°	63;40
75°	69;45
82 ½°	75;33
90°	81;2

According to Toomer[40], the 24 values for this chord table (Table 4) and its interval of 7;30° derive from just a few geometric a l bases:

- Degrees and minutes are the linear measures of the circle and its radius;

- The circle is divided into 360 degrees of 60 minutes each (360x60'=21.600')[41];

- Assuming π=3;8,30, value used by Ptolemy in *Almagest* V, 7, the diameter is 6,876' (21,600/π) and the radius is 3,438' (6,876'/2=57;18)[42];

- The diameter is the length of crd(180°) (as it coincides with the chord);

- The radius is the value of crd(60°), in fact the center angle forms an equilateral triangle in which the sides are equal to the radius.

These data enable to derive the remaining values of the table (Figure 3):

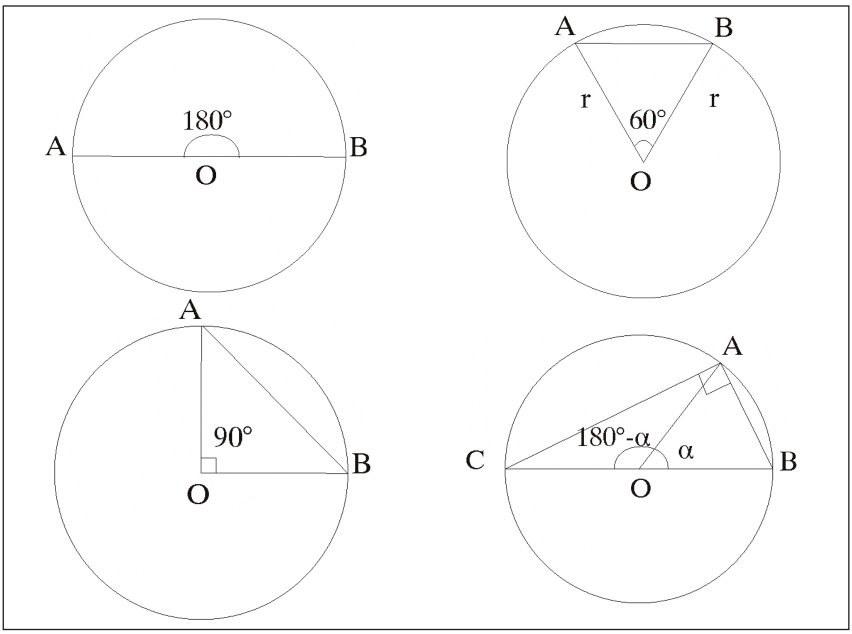

Figure 3. crd(180°), crd(60°), crd(90°) and crd(180°- α).

Table 5. Computation of Hipparchus' table.

		90°↓					
		↓45°	→	135°↓			
157 1/2°	←	22 1/2°		67 1/2°	→	112 1/2°	
120°	←	60°↓					
		30°↓	→	150°↓			
	↓165°	←15°↓		↓75°	→	105°↓	
97 1/2° ←	82 1/2°	7 1/2°→	172 1/2°	37 1/2°→	142 1/2°	52 1/2°→	127 1/2°

- crd(90°) is the diagonal of a square in which the side is the radium of circle[43];

- crd(180°- α) is equal to the difference between the squares of the diameter and crd(α) (theorem of Pythagoras);

- For the derivation of crd(α/2) Hipparchus probably derives crd(α/2) from the same formula which Ptolemy uses in *Almagest*[44].

Toomer [22] schematizes (Table 5) the steps to compute the values of Hipparchus' table: the lateral arrows indicate the use of supplementary chords (crd(180°- α)), the vertical arrows the use of the chord of the half angle (crd(α/2)).

7. Menelaus and the spherical trigonometry

According to Theon of Alexandria, Menelaus[45] also wrote a work about the chords[46], even if his treatise *Sphaerica*[47] is more interesting and important: three Books on spherical geometry in which he shows the passage of trigonometric theories from the plane to the sphere[48]. This work entitles Menelaus to be considered the founder of the spherical trigonometry and being the first to separate it from spherical geometry and astronomy.

In the first book, dedicated to spherical geometry, there is the new definition of a spherical triangle[49]: it is called τρίπλευρον, three sides, to distinguish it from the plane triangle called τρίγωνον, three angle. After the definitions 3, 4, 5, 6 about angles of the spherical triangle, there are 35 propositions, which study the properties of the triangles[50]: for example, proposition 11 proves that the three angles of a spherical triangle are greater than a straight angle.

The second book deals with astronomy, while the third one with spherical trigonometry. In the latter the first proposition is known as Menelaus' theorem[51], which was used in antiquity to solve spherical triangles (Figure 4). The modern formula is

$\sin P_1A \times \sin P_2B \times \sin P_3C = \sin P_1C \times \sin P_2A \times \sin P_3B$

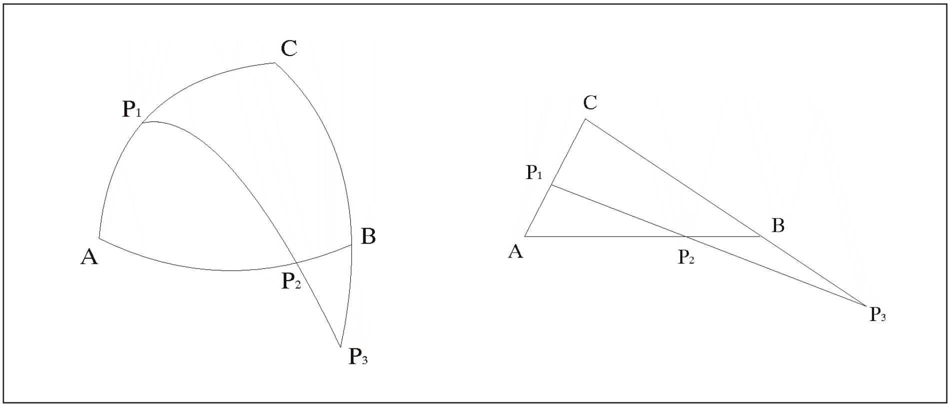

Figure 4. Menelaus' theorem for spherical and plane triangles.

To demonstrate this theorem, the author uses a similar theorem for the plane[52], which states in modern notation:

$P_1A \times P_2B \times P_3C = P_1C \times P_2A \times P_3B$

As Menelaus did not prove the last theorem, one can assume that it was already known[53] or that he had demonstrated it in another work.

8. Ptolemy

The first existing trigonometry table[54] can be found in Almagest I, 11. Its importance is emphasized by its position in the work, which is after the first chapters on the celestial sphere and the Earth[55].

The next Figure 5 shows a part of the *Almagest*'s table (Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν, "table of chords in circle"): it is divided into three main columns with numbers written in the Alexandrian numeric system[56].

KANONION ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ο̃	ς''	ο̃	λα	κε	ο̃	α	β	ν
α	ο̃	α	β	ν	ο̃	α	β	ν
α	ς''	α	λδ	ιε	ο̃	α	β	ν

Figure 5. Ptolemy's table of chords [20].

The first column (περιφερειῶν, "arcs") shows the angles from ½° to 180° by steps of ½°; the second column (εὐθειῶν, "chords") states the values of the

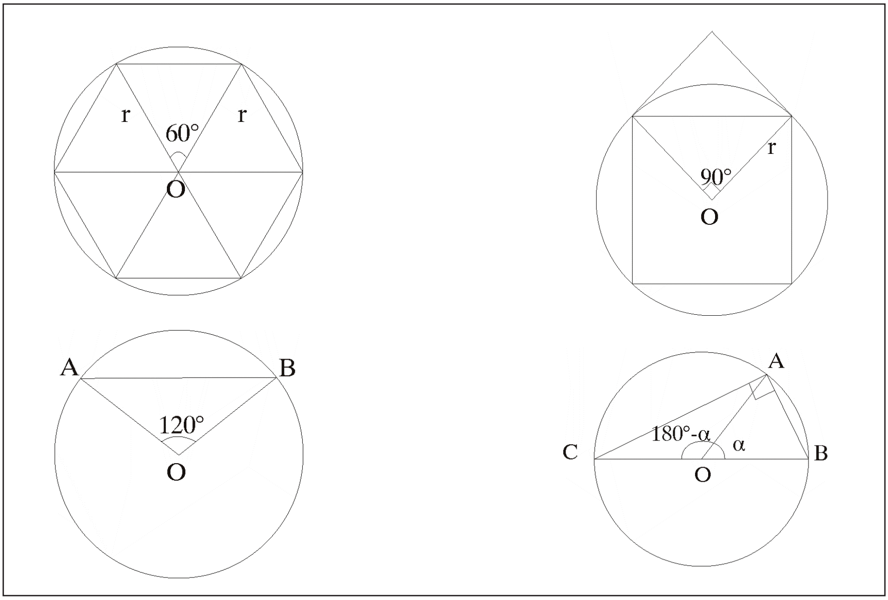

Figure 6. crd(60°), crd(90°), crd(120°) and crd(180°- a).

chords in parts, of which 120 are the length of the diameter; the third column (ἑξηκοστῶν, “sixtieths”) shows 1/30th of the excess of one chord over the one before[57].

The construction of Ptolemy’s table of chords involves various steps[58]:

- The circle and its diameter are divided into 360 and 120 equal parts or degrees respectively (also the lengths of the chord will be expressed using the same parts and fractions on sexagesimal system);
- For particular angles it is possible to obtain the chord length by simple geometrical considerations (the chord is the side of a regular polygon[59] inscribed in a circle[60])
- Other chords can be found with the relation crd(180°- α);
- The proof of Ptolemy’s theorem;
- The formula for crd(α/2).

Firstly Ptolemy calculates crd(36°) and crd(72°), the sides of the decagon and the pentagon inscribed in a circle respectively[61]. Next he derives the chords which are the sides of other regular inscribed figures (Figure 6): the hexagon (crd(60°))[62], the square (crd(90°)) and the equilateral triangle (crd(120°))[63].

Crd(108°) and crd(144°) are derived from the theorem of Pythagoras which enables to determine crd(180°- α) as the difference between the squares of the diameter and crd(α)[64].

In order to obtain the length of the other chords, Ptolemy proves the theorem, which bears his name: it states that in an inscribed quadrilater the product of the diagonals is equal to the sum of the two products of the opposite sites (Figure 7)[65].

Thus this theorem enables to find crd(α-β) and crd(α+β), if crd(α) and crd(β) are known (Figure 8).

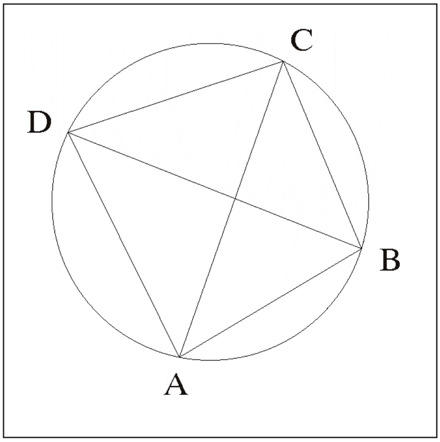

Figure 7. Ptolemy's theorem.

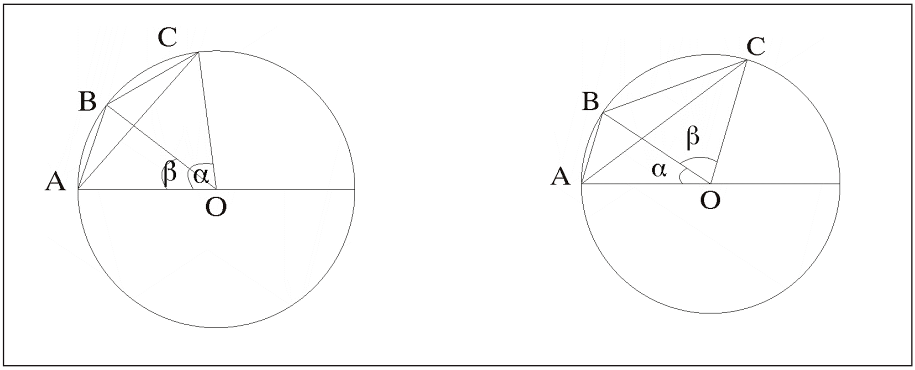

Figure 8. crd(α-β)[66] and crd(α+β)[67].

In the next step Ptolemy determines crd(α/2), using a theorem already known in Archimedes' time, as it is shown in Thābit ibn Qurra's translation of the heptagon treatise of the same author[68]. In the end Ptolemy finds the length of crd(1°) by approximation[69] and then he calculates crd(1/2°).

Considering the mathematical steps followed by Ptolemy to develop the table of chords one has the impression that they are not new to him, but are based on previous theories (Euclid, Archimedes, Aristarchus, Hipparchus)[70]; we undoubtedly owe the summary and organization of the various treatises to Ptolemy, to find the smallest number of propositions that are necessary to the construction of this table. But we still do not know who developed the first table of chords.

Notes

1 From Herodian (about 170-200 A.D.), a grammarian who described these numbers for the first time. The name seems to have been introduced by Woisin in his thesis, *De graecorum notis numeralibus*, Lipsia 1886. See [3] and [4].

2 The creation of a numeric system was often related to the problem of the writing: people who developed an alphabet represented numbers through letters and afterwards using the first letter of the number name; while the ones who did not have an alphabet created a series of symbols to represent the basic numbers and their combination to write all the others.

3 The numeric system was in use also outside Attica, despite the marks varied with the form of the local alphabets. For example, in Boeotian inscriptions the numbers were represented in the following way: o for 50, for 100 [3].

4 One of the advantages was that each number smaller than 1,000 could be represented using no more than 3 symbols.

5 It seems that the system was already used in the 5th century B.C. or at least in the 8th (for the dating and the invention in Miletus, Asia Minor, see [4]): the fact that the Alexandrian system used three archaic letters, *vau* (or stigma), *koppa* and *sampi* (6, 90, 900 respectively) to represent its 27 numbers, as the Ionic alphabet had only 24 letters, could indicate that it developed when these letters were still used. But this hypothesis does not explain why 5 centuries passed before the introduction of the Alexandrian system, more synthetic and essential than the previous one, that was however kept for use in the epigraphs. See [5].

6 For examples, 11 was represented by ια, 22 by κβ and 153 by ρνγ. When numbers contained more than one letter, the higher numbers were put before the lower in European Greece, while in Asia Minor it was the contrary: ρκγ and γκρ respectively. The custom of writing the numbers in descending order was fixed due to the influence of the Roman practice [3].

7 For example, 8,888 was written ,ηωπη or also ʾηωπη or also ηωπη.

8 Boyer [1] shows some particular cases: ä for 10,000 or ,ä for 10,000,000.

9 For examples the Greeks could represent 20,000 by βM or Mβ, whereas sometime M was omitted.

10 For a survey of the problem of the fractions in antiquity, in particular for the Egyptian, Mesopotamic and Indo-Iranian scientific field, see [7]. See also [8] and [9] in which Sethe's terminology of fraction is improved: *Stammbrücke* for the unit fractions, *Komplementbrücke* for 1 - 1/n and *Gemischte Brücke*, for example 5/9.

11 For example, γ' represented 1/3 (the full expression is γ' μέρος or that is to say τρίτον μέρος). Also Ptolemy uses these methods for fractions in *Almagest* [10].

12 Archimedes writes L'δ' for 1/2 + 1/4 and Heron ω' ιγ' λθ' for 2/3 + 1/13 + 1/39 (10/13) [3].

[13] In some cases the Greeks preferred to write a proper ordinary fraction as the sum of “unit fraction”: for example, L ’δ’, or 1/2 + 1/4, represented 3/4.

[14] The sexagesimal fractions used the Babylonian numeric system (for a survey, see [11], [12], [4] and [13]): it represented the unity with a vertical wedge which was repeated up to nine times (these wedges were also placed in more rows); an angular wedge represented ten and its repetition was used also for the following tens. The system was position-value, that is to say the numbers were arranged according the powers of 60 and the base was represented by a vertical wedge; only its position showed the value: for example, the sequence 1 2 represents $1*60^n + 2*60^{n-1}$ and the value of exponent n is understood only from the context. The lack of a sign to represent the absence of a number in some position (for example  could represent both 80 and 3,620 because the first vertical wedge could be read 60 or 60^2) was remedied by introducing two horizontal or oblique small wedges within the numeral.

[15] “Καθόλου μέντοι χρησόμεθα ταῖς τῶν ἀριθμῶν ἐφόδοις κατὰ τὸν τῆς ἑξηκοντάδος τρόπον διὰ τὸ δύσχρηστον τῶν μοριασμῶν ἔτι τε τοῖς πολυπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς ἀκολουθήσομεν τοῦ συνεγγίζοντος ἀεὶ καταστοχαζόμενοι” “In general we shall use the sexagesimal system for our arithmetical computations, because of the awkwardness of the [conventional] fractional system”, *Almagest*, I, 10; [14].

[16] In the modern notation of the sexagesimal system, the integer part is divided from the fractional part with “;” while the sexagesimal fractions are divided by “,”.

[17] Naturally the sexagesimal numbers were represented using Alexandrian system. For the sign of zero, see [4].

[18] For the extraction of the square root, see [15] and [3].

[19] For examples about operations with fractions and sexagesimal numbers, see [6].

[20] From modern Latin *trigonometria* and Greek τρίγωνον, triangle, and μέτρον, “measure”. In the *Thesaurus* Bartholomäus Pitiscus (1561-1613) introduced this word. This branch of mathematics deals with relations between sides and angles of triangles. Spherical trigonometry explains how to find relations between the sides and angles of spherical triangles. For the history of trigonometry, see [16] and [17].

[21] In obtuse-angled triangles the square on the side opposite the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the obtuse angle and the straight line cut off outside by the perpendicular towards the obtuse angle.

[22] In acute-angled triangles the square on the side opposite the acute angle is less than the sum of the squares on the sides containing the acute angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the acute angle and the straight line cut off within by the perpendicular towards the acute angle.

[23] $c^2=a^2+b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \alpha$, where a, b, c are the sides of triangle and α is the angle between the sides a and b.

[24] For a description of the studies about the first compiler of a table of chords, see [22] and [23].

[25] A decade before Gow [15] writes about Hipparchus: "it is evident therefore that Hipparchus was the founder of trigonometry".

[26] "A la suite des recherches d'Archimède sur le rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre, des calculs, peut-être déjà entrepris par le géomètre de Syracuse, furent faits pour déterminer les cordes des différents arcs", [21]. See also [24].

[27] "Hipparque, trouvant ainsi le terrain préparé, calcula des tables plus exactes que toutes celles qui avaient été essayées avant lui, et auxquelles il donna la forme qui devint plus tard classique", [21].

[28] Loria [25] writes: "la creazione della trigonometria nell'antichità provenne dalla necessità di avere a propria disposizione una tavola delle lunghezze che hanno le corde di tutti gli archi multipli di una parte aliquota della circonferenza. Questo bisogno fu avvertito, se non prima, da Ipparco al quale si attribuisce un'opera in dodici libri sul calcolo delle corde di un circolo; per tal fatto ad Ipparco venne da molti attribuita l'invenzione della trigonometria, da molti, ma non da tutti".

[29] In the same year Bond [26] writes an article in which he treats the history of trigonometry from Thales until XV century and he finds in Hipparchus the founder of trigonometry.

[30] For the analysis of the three sources and for the passage of Heron's *Metrica* from which Heath concludes that the Greek author quoted Hipparchus' work on chords, see [3] and [27].

[31] Boyer [19] also states that the tables of chord did not exist when Aristarchus wrote his work, *On the Sizes and Distance of the Sun and Moon*.

[32] Formerly Tannery [21] had underlined a link between Greek and Indian trigonometry: "le *Sûrya-Siddhānta* nous présente un système au premier abord tout à fait différent. Cependant cet ouvrage, le plus ancien traité mathématique des Indous, porte des traces si marquées d'emprunts faits aux Grecs, que l'on est induit à soupçonner que la trigonométrie dont il y est fait usage n'a pas une autre origine". Neugebauer [28] writes that Hipparchus' table of the chord was not only the basis of the development of Greek trigonometry but also of the Indian tables. In fact Indians used the half chord, introducing the Hindu notion of the modern trigonometric function sine: if one divides Hipparchus' crd(7;30°), one gets sine of the angle 3;45°, the fundamental angle of Indian table of the sine ([29], [30], [13]). The interval of these tables, called in Arabic *kardaǧa* (from Sanskrit *kramajyā,* sine), was usually 3;45°, while Ptolemy used half degree. Furthermore in the Indian table the radius of the circle used for the calculus of half chord is 3438' and was equal to the radius used by Hipparchus [22]. Thanks to the Arabs the Hindu tables of the sine (for their influence on Sasanian astronomy, see [31]) reached Europe (for the first Byzantine work in which a table of the sine is used,

see [38] and [33]). Also the origins of the word sine derive from India: the Hindu called the half chord *jyārdha* or *ardhajyā*, shortening it in *jyā*; the Arabs translated it in *jīb*. When the word arrived in Europe, it was confused with the similar Arabic word *jaib*, meaning "pocket" or "gulf", and it was translated into *sinus*, the corresponding Latin word [16].

33 "Je ne pense pas que la création des tables ait signifié quelque chose de fondamentalement nouveau dans le développement des mathématiques grecques", [23].

34 In trigonometry there are four trigonometric functions (also called circular functions): sine, cosine, tangent, cotangent, are function of a center angle α of a circle whose radius is 1.

35 For the angle's description in the Greek geometry, [23].

36 If the radius is equal to 1 (unit circle in modern trigonometry) the relations between chord and sine are: crd(α) = 2 sin (α/2) and vice versa sin α = 1/2 crd(2α). If the radius has a length equal to R the relations are crd(α) = 2 R sin(α/2) and sin α = crd(2α)/2R.

37 Very little is known about the life of Hipparchus. One of the principal source is Ptolemy's *Almagest*, written three century later: it dates some astronomical observations of Hipparcus between 161 and 126 B.C. He was born in Nicaea in Bithynia, in fact on coins of the reigns of Antoninus (138-161), Commodus (180-192), Marinus (217), Alexander Severus (222-235), Gallus (251-253) he is always called "the Bithynian" or "the Nicaean"; see [35], [36] and [37].

38 Van der Waerden [12] states than the table was certainly arranged in the sexagesimal numeric system.

39 Hipparchus may have calculated geometrically these angles and derived the others for interpolation [22].

40 Duke [38] applied Toomer's results to Hipparchus' astronomy.

41 The circle is divided in accordance with Hypsicles' system (second half of second century B.C.): his *De ascensionibus* is the first Greek work in which the ecliptic circle is divided into 360 parts [3].

42 In this case the relation between sine and chord is sin α =crd(2α)/ (2x3,438)

43 It needs only a value for √2. The Babylonians computed this value with accurate approximation thanks to their fractional notation: 1.414213… instead of 1.414214... [18].

44 $\sqrt{\frac{1}{2}(d^2 - d\sqrt{d^2 - crd(\alpha)^2})}$ where "d" is the circle diameter [22].

45 As for Hipparchus, information on Menelaus can be found in the *Almagest* (VII, 3), in which there is an observation in A.D. 98 [39].

46 Also for the number of books of his work can be made the same consideration as for Hipparchus [22].

47 For a complete description of the work content, see [3], [10] and [18].

48 "In the *Almagest* spherical trigonometry is based on a theorem of Menelaus (late first century of the

Christian era), and there is no evidence for the existence of the trigonometry of the surface of the sphere before Menelaus", [36]. See also [4] and [40].

49 A spherical triangle is the area included by arcs of great circles on the surface of a sphere, subject to restriction that the sides of the triangle are arc less than a semicircle.

50 "Menelaus's object, so far as Book I is concerned, seems to have been to give the main propositions about spherical triangles corresponding to Euclid's propositions about plane triangles", [3].

51 In the Middle Ages the theorem was known as *Regula sex quantitatum* for the six variable quantities that involves.

52 For two theorems proof, [12], [10] and [35].

53 Bulmer-Thomas [39] and Boyer [19] suggest that Euclid knew Menelaus' theorem, in plane arrangement.

54 In *Almagest* I, 13 there is also the proof of Menelaus' theorems which, according to Halma [20], are "d'un grand secours à Ptolémée pour la solution de ses problèmes de trigonométrie sphérique". The presence of the table of chords itself and Menelaus' theorems recognizes the *Almagest as* the most ancient work known in which there are both plane and spherical trigonometry.

55 In the index the trigonometry chapters are not presented, although Ptolemy writes in *Almagest* I, 9: "we see that it is first necessary to explain the method of determining chords: we shall demonstrate the whole topic geometrically once and for all", [41].

56 Sidoli developed in 1998 (version 1.0) and next in 2003 (version 1.1) a *Mathematica* package that defines a number of functions that facilitate working with Ptolemy's trigonometry (http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/584/, access January 2008). Some functions are:

- ChordTable[angle] returns the chord value;
- PtolemyForm[%] shows a value in sexagesimal system;
- RightTriangleSide[angle] returns the side value of opposite angle in a right triangle inscribed in a circle with diameter equal to 120;
- RightTriangleAngle[side] is the inverse function of the previous one.

57 To determine the chord of an arc not listed in the first column it is necessary the next formula

$$\mathrm{crd}(\alpha) = \mathrm{crd}(\alpha_n) + (\alpha - \alpha_n) \times (f(\alpha_n))$$

where $\alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1/2}$ and $f(\alpha_n) = 1/30\,[\mathrm{crd}(\alpha_{n+1/2}) - \mathrm{crd}(\alpha_n)]$ is the value in the third column.

For example, the difference between crd(2 1/2°) and crd(2°) is 0;37,4 and 1/30 of it is 0;1,2,48, the amount entered in the third column. Thus crd(2;25°) is equal to crd(2°) plus 25 times 0;1,2,4. See [3] and [10].

58 Through the decades, the method to develop the table of the chords was described and commented by various scholars: for example, [3], [12], [10], [35], [18] and [41].

[59] A polygon is regular when all angles are congruent and all sides have the same length.

[60] If the regular polygon inscribed in the circle has n sides, the length of the side is crd(360°/n).

[61] For this proof two propositions of Euclid's Elements are necessary: XIII.9 (if the side of the hexagon and that of the decagon inscribed in the same circle are added together, then the whole straight line has been cut in extreme and mean ratio, and its greater segment is the side of the hexagon) and XIII.10 (if an equilateral pentagon is inscribed in a circle, then the square on the side of the pentagon equals the sum of the squares on the sides of the hexagon and the decagon inscribed in the same circle).

[62] An hexagon inscribed in the circle forms six equilateral triangles in which the sides are equal to the radius (60 parts) of the circle.

[63] crd(90°) is the side of the square inscribed in the circle; crd(120°) equals the product of $\sqrt{3}$ and radius. For the values of and known by Ptolemy, see [35].

[64] This result is equivalent to the modern formula $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (it can be deduced applying the relation between chord and sine, $crd(\alpha)^2 = 120^2 \, sen^2(\alpha/2)$, to $crd(180°- \alpha)^2=120^2- crd(\alpha)^2$).

[65] Being of an elementary character, this theorem probably dates from an early period and Ptolemy stated and proved it in *Amagest* [10]. Loria [25] comes to the same conclusion: "è nostro convincimento che questa proposizione non appartenga a Tolemeo: si suole attribuirla a lui soltanto perché l'*Almagesto* è la prima opera in cui s'incontra; ma poiché Teone Alessandrino ne parla (ed. Halma, T. I, p. 187) circa nello stesso modo che adopera riguardo al teorema di Menelao (id. p. 232 e 238), è poco probabile che si tratti di una scoperta di Tolemeo". On the other hand, Toomer [22] "we are led irresistibly to the conclusion that the formulas for the chord of the sum and the chord of the difference (and presumably the theorem on which they are based) are the work of Ptolemy himself". See also Boyer [20] where a particular case of Ptolemy's theorem already known to Euclid, is described.

[66] $crd(\alpha-\beta)$= BC, with $crd(\alpha)$= AC and $crd(\beta)$= AB.

[67] $crd(\alpha+\beta)$ = AC, with $crd(\alpha)$= AB and $crd(\beta)$= BC.

[68] Again Toomer [22] in this case adds: "it is surely significant that for the derivation of the chord of the half-angle Ptolemy did not use a method depending on Ptolemy's Theorem (though, as we have seen, his result can be simply derived from that theorem), but used instead one which was, demonstrably, known long before his own time. The obvious explanation for this anomaly is that this part of the geometrical basis of his trigonometry, and this alone, is taken over from his predecessors". To demonstrate the dependence of the $crd(\alpha/2)$ from Ptolemy's theorem, see [22] and [35].

[69] For this method Ptolemy uses a proposition already known by Aristarchus. See [3], [12] and [10].

[70] Szabo and Maula [23] go over, considering a literary scientific genre of the construction of the table of chords: "lorsqu'on a eu l'idée qu'il était plus commode de calculer d'avance les différentes cordes,

que de recommencer les mêmes calculs pour chaque cas concret, la valeur de la plus grande corde, le diamètre, étant fixée une fois pour toutes, les tables de cordes devinrent pour ainsi dire un genre scientifico-littéraire. Il est probable que plusieurs savants se sont essayés à ce genre" e che "Ptolémée a lui aussi suivi les lois du genre".

References

[1] BOYER C. B. 1944, *Fundamental Steps in the Development of Numeration*, "Isis", 35, 153-168.

[2] IFRAH G. 1994, *Histoire universelle des chiffres*, Paris.

[3] HEATH T. 1921, *History of Greek Mathematics*, Oxford.

[4] NEUGEBAUER O. 1957, *The Exact Sciences in Antiquity*, Providence.

[5] DONNINI A. 2000, *5 Mila Anni di Pensiero Matematico*, Torino.

[6] PEYROUX J. 1993, *Les Opérations Arithmétiques chez les Grecs*, Paris.

[7] PANAINO A. 1997, *Considerations on the "Mixed Fractions" in Avestan*, in E. Pirart (éd.) *Syntaxe des langues Indo-iraniennes anciennes. Colloque international – Sitges (Barcelona), 4 – 5 mai 1993. Organisé par l'Institut du Proche-Orient Ancien (Université de Barcelone)*, Barcelona, 91-109.

[8] SETHE K. 1916, *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Ein Beitrag zur Geschichte von Rechenkunst und Sprache*, Schriften der Wissenschaftlichen Gesellschaft Straßburg, 25. Heft, Straßburg.

[9] NEUGEBAUER O. 1969, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*. 1. *Vorgriechische Mathematik,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 43, Berlin.

[10] PEDERSEN O. 1974, *A Survey of Almagest*, Odense.

[11] THUREAU-DANGIN F. 1932, *Esquisee d'une Histoire du Système Sexagésimal*, Paris.

[12] VAN DER WAERDEN B. L. 1954, *Science awakening I,* Groningen.

[13] GHEVERGHESE J. G. 1990, *The crest of the Peacock : non-european roots of mathematics*, London.

[14] IVOR T. 1939-1941, *Selections Illustrating The History of Greek Mathematics with an English Translation by Ivor Thomas*, 2 voll., Cambridge.

[15] GOW J. 1884, *A short history of Greek mathematics*, Cambridge.

[16] KENNEDY E. S. 1969, *The History of Trigonometry*, Historical Topics for the Mathematics Classroom, National Council of Teachers of Mathematics, Thirty First Yearbook, 333-359.

[17] VAN BRUMMELEN G. 2009, *The Mathematics of the Heavens and the Earth, The Early History of Trigonometry*, Princeton - Oxford.

[18] KLINE M. 1972, *Mathematical Thought Ancient to Modern Times*, New York - Oxford.

[19] BOYER C. B. 1989, *A History of Mathematics*. Second edition, New York.

[20] PTOLÉMÉE C. 1813, *Composition mathématique de Claude Ptolémée. Tome premier, Trad. pour la 1ère fois du grec en français sur le ms. originaux de la bibliothèque impériale de Paris par M. Halma et suivie des notes de M. Delambre*, Paris.

[21] TANNERY P. 1893, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris.

[22] TOOMER G. J. 1973, *The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry*, Centaurus, 18, 6-28.

[23] SZABO A. - MAULA E. 1986, *Les debuts de l'astronomie, de la geographie et de la trigonometrie chez les Grecs*, *traduit de l'allemand par M. Federspiel*, Paris.

[24] ROME A. 1932, *Premiers essais de trigonométrie rectiligne chez les grecs*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, series A 52, 271-274.

[25] LORIA G. 1902, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Modena.

[26] BOND J. D. 1921, *The Development of Trigonometric Methods down to the Close of the XVth Century*, Isis, 4, 295-323.

[27] ROME A. 1933, *Premiers essais de trigonométrie rectiligne chez les grecs*, L'antiquite classique, 2, 177-192.

[28] NEUGEBAUER O. 1972, *On some Aspects of Early Greek Astronomy*, in Proceedings of the American Philosophical Society, 116, 243-251.

[29] NEUGEBAUER O., PINGREE D. 1970-1971, *The Pañcasiddhāntikā of Varāhamihira*, Copenhagen.

[30] PINGREE D. 1978, *History of Mathematical Astronomy in India*, *Dictionary of Scientific Biography*, XV Supplement I Topical Essays, 533-633, New York.

[31] AL-HĀSHIMĪ ʿALĪ IBN SULAYMĀN 1981, *The Book of the Reasons behind Astronomical Tables (Kitāb fi ʿīlal al-zījāt), a facsimile Reproduction of the unique Arabic Text contained in the Bodleian Ms. Arch. Seld. A. 11 with a Translation by F. I. Haddad and E. S. Kennedy and a commentary by D. Pingree and E. S. Kennedy*, New York.

[32] NEUGEBAUER O. 1969, *Commentary on the Astronomical treatise: Par, gr. 2425*, Mémoires Académie Royale de Belgique. Classe des lettres et des sciences morales et politiques, Bruxelles.

[33] TIHON A. 2000, *Les textes astronomiques arabes importés à Byzance aux XI^{e} et XII^{e} siècle*s, in Occident et Proche-Orient: contacts scientifiques au temps des Croisades. Actes du colloque de Louvain-la-Neuve, 24 et 25 mars 1997, 313-324, Brepols.

[34] VAN DER WAERDEN B. L. 1986, *On Greek and Hindu Trigono*metry, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, 38, 397-407.

[35] NEUGEBAUER O. 1975, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, New York.

[36] TOOMER G. J. 1978, *Hipparchus*, Dictionary of Scientific Biography, XV, 207-224.

[37] REPELLINI F. F. 1985, *Ipparco e la tradizione astronomica*, in G. Giannantoni e M. Vegetti (ed.), *La Scienza Ellenistica.* Atti delle tre giornate di studio tenutesi a Pavia dal 14 al 16 aprile 1982, Napoli, 187-223.

[38] DUKE D. W. 2005, *Hipparchus' Eclipse Trios and Early Trigonometry*, Centaurus, 47, 163-177.

[39] BILMER-THOMAS I. 1974, *Menelaus of Alexandria*, Dictionary of Scientific Biography, IX, 296-302.

[40] SIDOLI N. 2004, *Hipparchus and the Ancient Metrical Methods on the sphere*, Journal for the History of Astronomy, xxxv, 71-84.

[41] TOOMER G. J. 1998, *Ptolemy's Almagest*, London.

La tavola delle corde e la trigonometria greca

Parole chiave: storia della matematica, sistemi numerici, antichità

1. Introduzione

Lo studio del pensiero matematico nell'antichità, data la difficoltà intrinseca alla disciplina stessa, che richiede sia competenza filologica sia scientifica, costituisce uno dei settori meno frequentati dei nostri studi, se non da un limitato numero di specialisti, che opera in circoli ristretti, quasi in una sorta di riserva indiana. Invece, tale ambito di ricerca appare fondamentale per comprendere meglio non solo i grandi sistemi di ordine tanto filosofico quanto geografico, astronomico-astrologico, architettonico, etc., ma la stessa vita quotidiana degli antichi, che pur facevano di conto, ed, almeno in alcuni cenacoli, anche mediante l'ausilio di tecniche alquanto raffinate. La conservazione dei beni culturali, in particolare di quelli dell'antichità, non può, quindi, prescindere da un'accurata conoscenza dei metodi e degli strumenti concettuali e pratici su cui si fondava il calcolo degli antichi, segnatamente nel caso dei Greci, la cui trigonometria resta alla base degli sviluppi posteriori, a partire dagli stessi Arabi, che ne perfezionarono alcuni ambiti. Un aspetto, peraltro, molto difficile da trattare, anche per gli storici della matematica (i quali, perlopiù, si occupano del periodo che dal Medioevo porta sino all'età moderna e contemporanea), emerge dalla tremenda difficoltà di dominare i metodi pratici, di conoscere l'applicazione delle regole operazionali, oggi superate e, ovviamente, non più insegnate di norma né a scuola né all'università. Non si tratta, allora, soltanto di abbandonare la calcolatrice od il terminale, ma di porsi dinanzi ai problemi con gli strumenti concettuali ed operativi disponibili agli antichi, in modo da ripercorrerne i passi, comprenderne le difficoltà, i limiti, ma anche le potenzialità. Insomma, se per l'evoluzione delle scienze ciò che è ormai obliterato finisce in un immaginario cestino, per lo storico tale anticaglia diviene una fonte eccezionale di conoscenza, che, peraltro, impedisce di cadere in ridicoli anacronismi o di lasciare un eventuale studioso completamente disarmato davanti ad una pagina piena di numeri e calcoli redatta da un matematico greco. Non è un caso, purtroppo, che siano abbastanza inaccessibili e spesso alquanto esoterici i lavori che, invece, cercano di rendere più comprensibili tali competenze arcaiche, insegnandone le regole e le procedure. Sotto questo profilo il lavoro qui presentato viene a colmare un vuoto, se si vuole, anche e soprattutto didattico (sebbene si tratti di didattica molto specializzata ed indirizzata a quel manipolo di coraggiosi veramente interessati alle scienze matematiche antiche), giacché di norma in questo ambito si presuppone che uno si sia già “arrangiato” da solo. Questa breve monografia potrà fungere quasi da “Virgilio” per coloro che vorranno incamminarsi per strade infernali, al fine di raggiungere, usciti dal fuoco purgatorio, il paradiso dei numeri e delle forme geometriche, in una sfera celeste che nella trigonometria ha sempre avuto una delle strade d’accesso più privilegiate.

2. I sistemi greci di numerazione

La creazione di un sistema di numerazione fu legata a due esigenze dell’uomo: conservare delle informazioni e rendere possibili calcoli non effettuabili mentalmente.

Boyer [1] ha individuato tre momenti nel suo sviluppo:

- la creazione di un simbolo come unità e la sua ripetizione per rappresentare tutti gli altri numeri;
- la distribuzione grafica dei simboli formanti i numeri diversi dall’unità per semplificarne la lettura;
- l’introduzione di nuovi simboli per identificare alcuni numeri “chiave”.

Il sistema numerico minoico (prima metà del II millennio a.C., tabella 1) mostra chiaramente i tre precedenti aspetti. I simboli indicavano solo le potenze di 10 ($1=10^0$, $10=10^1$, $100=10^2$) sulle quali si ricostruivano i rimanenti numeri per mezzo di un principio iterativo: ad esempio, il 3 era scritto con tre tratti verticali (“///”), mentre il 13 era dato dall’unione del 10 con l’unità riportata tre volte (“/ ///”). Tale sistema fu impiegato, con piccole variazioni, nella scrittura “lineare A” e “lineare B” [2].

Anche il sistema greco attico o erodiano[1] (tabella 2), utilizzato nelle iscrizioni che vanno dal V sec. a.C. fino agli inizi dell’era cristiana, impiegava tali elementi oltre ad aggiungere il principio dell’acrofonia[2]: i numeri 5, 10, 100, 1.000, 10.000 erano rappresentati dalla prima lettera delle rispettive parole (Π e successivamente Γ per πέντε, Δ per δέκα, Η per ἑκατόν, Χ per χίλιοι, Μ per μύριοι)[3].

Il sistema usava 6 segni con i quali componeva tutti gli altri attraverso un principio additivo. Alcuni numeri, ad esempio il 50 ed il 500, si rappresentavano invece con l’unione di due lettere, sfruttando un principio moltiplicativo.

In un secondo momento i Greci passarono a un nuovo sistema che prese spunto da alcune modifiche apportate dagli scribi egizi al proprio: in Egitto i numeri furono riprodotti solo da un simbolo invece che da una loro ripetizione (figura 1)[4]. Gli Egizi tuttavia non sfruttarono interamente questa struttura, che variava a seconda dello scriba che ne faceva uso e che spesso veniva utilizzata solo per rappresentare le decine e le centinaia, mentre per le migliaia si faceva uso di principi additivi o moltiplicativi [1].

Furono proprio i Greci a capirne le potenzialità e a utilizzarla nel loro sistema, detto ionico o alessandrino, che sostituì quello attico verso il III sec. a.C. (tabella 3)[5].

In tale sistema le 27 lettere erano divise in tre gruppi: le unità (1-9), le decine (10-90) e le centinaia (100-900)[6]. Per rappresentare le prime 9 migliaia era invece preposto all’unità, in basso o in alto, un apice che poteva essere omesso quando il contesto era chiaro[7]. Il 10.000 era l’inizio di una nuova categoria[8] (ἡ πρώτη μυριάς, ‘la prima miriade’) nella quale veniva utilizzato un principio moltiplicativo: le cifre potevano essere poste sopra la lettera M oppure precederla o seguirla[9].

Oltre a questo sistema si possono trovare altri tre modi per rappresentare le miriadi [6]:

- far precedere i simboli delle decine e delle centinaia dall’apice, arrivando così a rappresentare i numeri fino a 999.999;
- far seguire il simbolo delle miriadi da Μυ;

- sostituire Μυ con un punto.

Per rappresentare ἡ δευτέρα μυριάς, ovvero 'la seconda miriade', numeri dell'ordine del 10.000^2, c'erano vari metodi, tra cui il raddoppiamento della M. Inoltre, per diversificare i numeri dalle lettere dell'alfabeto prima dell'Impero Romano si utilizzavano dei punti, due o tre, o semplicemente degli spazi, per delimitare le lettere che rappresentavano il numero; successivamente divenne abitudine inserire un tratto orizzontale al di sopra di esse.

3. Le frazioni

Quando dovevano scrivere frazioni unitarie (con numeratore uguale all'unità[10]), i Greci riportavano solo il denominatore seguito da un segno diacritico, o accento, al posto della barra orizzontale[11], mentre un metodo meno ortodosso consisteva nel far seguire al numero due accenti.

C'erano poi due segni particolari: L' (o C') che indicava ½ e ω' che indicava 2/3 (detto τὰ δύο μέρη, "le due parti")[12].

Per le frazioni con numeratore diverso dall'unità[13] i metodi di rappresentazione erano vari [3]:

- far seguire il numeratore dal denominatore con l'accento (Archimede scrive ι οα' per 10/71);

- ripetere due volte i segni che rappresentano i denominatori (Erone scrive ιγ' κθ' κθ' per 13/29);

- scrivere il numeratore e metterci sopra il denominatore (usato da Diofanto e opposto al metodo moderno);

- scrivere il denominatore come potenza del numeratore (cioè sopra al numeratore ma leggermente spostato a destra);

- inserire tra numeratore e denominatore le parole μόριον ("denominatore, divisore") ο ἐν μορίῳ ("diviso da").

Tolemeo nella costruzione della sua tavola delle corde nell'Almagesto impiegò invece le frazioni sessagesimali[14] che hanno come denominatore il numero 60 e le sue potenze[15]. Allo stato attuale degli studi non si è stabilito chi fu il primo ad introdurre tali frazioni nel mondo greco. Da quanto Tolemeo scrive nell'Almagesto, è noto che Ipparco calcolò la lunghezza del mese sinodico uguale a 29; 31, 50, 8, 20[16] (ovvero 29 + 31/60 + 50/60^2) giorni seguendo il sistema numerico sessagesimale: si deduce che nel II secolo a.C. il sistema doveva essere già stato adottato[17].

4. Le operazioni

I Greci chiamavano l'arte del calcolo ἡ λογιστική (s. τέχνη), da ὁ λόγος che in greco indica sia "calcolo" che "discorso", per differenziarla dalla teoria dei numeri, ἡ ἀριθμητική (s. τέχνη), che studiava le proprietà dei numeri. La logistica si occupava quindi delle operazioni (l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione[18]) e dei problemi che di solito necessitavano della divisione di una data quantità.

L'addizione (συντιθέναι) di due numeri veniva eseguita ponendo i numeri in colonna ed eseguendo la somma.

,αυκδ	1424+
ρ γ	103+
,βσπα	2281+
λ	30 =
,γωλη	3838

Per la sottrazione (ἀφαιρεῖν) il procedimento era lo stesso.

,γχλς	3636-
,γυ θ	3409=
σκζ	227

Per la moltiplicazione si scriveva il moltiplicando e sotto di esso il moltiplicatore, preceduto dalla parola ἐπί ("per"). L'algoritmo era molto simile a quello odierno, solo che per svolgere il prodotto si partiva dalla colonna della cifra più significativa per arrivare alla meno significativa (ovvero da sinistra verso destra), riportando i risultati di ogni singolo prodotto da sinistra a destra sulla riga sotto al moltiplicatore. La stessa cosa si ripeteva sulla riga seguente per il successivo numero del moltiplicatore, quindi si eseguivano le somme.

	νγ			53 x		
ἐπὶ	νγ			53 =		
	,βφ	ρν		2500	150	
		ρν	θ		150	9
	,β	ω	θ	2809		

La divisione era eseguita in maniera quasi analoga al nostro sistema e il quoziente veniva trovato per tentativi moltiplicandolo con il divisore[19].

5. La trigonometria antica

La nascita della trigonometria[20] non ha una data certa e sul personaggio indicato come il fondatore si è avuto nel passato e fino ai giorni nostri un lungo dibattito.

Kline [18] collega la nascita di questa parte della matematica a Ipparco, Menelao e Tolemeo, e alla necessità dell'astronomia antica di calcolare i movimenti degli oggetti celesti. Anche Boyer [19] nel suo capitolo sulla "Trigonometria e misurazione nella Grecia antica" indica in Ipparco il padre della trigonometria, sottolineando però che nel Libro II degli Elementi di Euclide le proposizioni 12[21] e 13[22] equivalgono a leggi riguardanti i coseni[23], espresse però in maniera geometrica, e ricordando che un teorema di Archimede sulla corda spezzata può avere un significato trigonometrico [19].

Uno dei primi a indicare in Ipparco il fondatore è stato Halma [20] che nella prefazione alla traduzione dell'Almagesto scrive che "les travaux auxquels ce laborieux astronome se dévouna avec un succès égal à l'amour pour la vérité, que Ptolémée loue en lui, firent naître la trigonométrie"[24]. Di tutt'altra opinione è Tannery [21] per cui "l'invention de la trigonométrie; elle ne peut être dûe à Hipparque et n'est pas l'œuvre d'un seul"[25]. Nel capitolo riguardante i matematici alessandrini l'autore prende in esame la nascita della trigonometria e fissa tre momenti principali:

- lo studio da parte di Archimede del rapporto tra circonferenza e diametro da cui furono sviluppati i calcoli per determinare le corde di differenti archi[26];

- la ripresa dei precedenti computi da parte di Apollonio;

- la costruzione da parte di Ipparco di una tavola delle corde più esatta di quelle costruite prima di lui, sfruttando gli studi di chi lo aveva preceduto[27].

Agli inizi del Novecento Loria [25], affrontando il problema della nascita della trigonometria[28], riporta le opinioni di Tannery, aggiungendo però che "tale schizzo storico sulla genesi della trigonometria contiene molti elementi ipotetici, che il lettore ravviserà tosto, anche senza il nostro aiuto; tuttavia presenta indiscutibili caratteri di verosimiglianza che auguriamo possano accrescersi con ulteriori ricerche".

Più cauto rispetto ai suoi predecessori è stato Heath [3][29] che riguardo alla trigonometria scrive "even if he did not invent it, Hipparchus is the first person of whose systematic use of trigonometry we have documentary evidence": le testimonianze citate sono una frase di Teone che attribuisce un trattato sulle corde ad Ipparco; un'affermazione di Pappo da cui si ricava che Ipparco utilizzò tavole trigonometriche ed infine l'opera, sempre di Ipparco, il Commentario sui fenomeni di Eudosso e Arato[30].

Anche Neugebauer [28] ha affrontato il problema, giungendo alla conclusione che "Aristarchus's discussion of the solution of one right triangle demonstrates the absence of a systematic trigonometry in the time before Hipparchus"[31] e dimostrando i legami che intercorrono tra la tavola delle corde di Ipparco e quelle indiane del seno[32]: "I have very little doubt that these tables are nothing but the transformation of the Hipparchian table of chords to a table of sines".

Recentemente Toomer [22] ha proposto un possibile metodo impiegato da Ipparco per la costruzione della sua tavola, mentre van der Waerden [34], nonostante abbia accettato le argomentazioni di Toomer, ha scritto che "who invented trigonometry? … His name is Apollonios of Perge".

Per un'altra via si sono mossi Szabo e Maula [23] nel loro libro, affrontando il medesimo problema: in esso si legge che le tavole delle corde sono il punto finale della storia della trigonometria greca e che molto probabilmente prima della loro costruzione venivano svolti ogni volta i singoli calcoli per ricavare la corda di un angolo[33]. A dimostrazione di questo interesse greco per le relazioni tra gli angoli e le corde di un cerchio si esprime la supposizione " que si l'on réfléchit sérieusement aux cinq propositions du livre III qui viennent d'être citées, on ne pourra s'empêcher de se demander si Euclide n'a pas conçu tout le livre comme une préparation à une table des cordes".

6. Ipparco e la tavola delle corde

I Greci non lavoravano con le moderne funzioni trigonometriche[34], ma utilizzavano la corda (indicata d'ora in poi con crd(α)), detta εὐθεῖα, definita come il segmento sotteso dall'angolo[35] al centro di una circonferenza, il cui raggio poteva avere dimensioni differenti (figura 2)[36].

Per il suo calcolo esistevano delle tavole in cui era possibile trovare i valori corrispondenti ad una lista di angoli; per gli angoli non presenti si poteva applicare il metodo dell'interpolazione per ottenere il valore della corda richiesto.

Di tali tavole oggi resta solamente quella di Tolemeo in Almagesto, I, anche se notizie di un precedente studio delle corde si ricavano da Teone di Alessandria, che attribuisce a Ipparco[37] un'opera di 12 libri su tale argomento: "Δέδεικται μὲν οὖν καὶ Ἱππάρχῳ πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἐν ιβ βιβλίοις, ἔτι τε καὶ Μενελάῳ ἐν ς", [14] (ovvero "uno studio delle corde in un cerchio è stato esposto da Ipparco in 12 libri, inoltre anche da Menelao in 6").

Secondo Toomer [22], 12 libri sono troppi se si pensa che nell'Almagesto, opera in 13 libri, la teoria occupa solo un capitolo. Il numero si riferirebbe alle sezioni, di 30 righe ciascuna, in cui Ipparco divise gli angoli dei quali calcolò la corda per interpolazione. Nonostante la sua imprecisione, Teone comunque rafforza l'idea dell'effettiva costruzione da parte di Ipparco di una tavola delle corde[38].

La scelta di 24 angoli (tabella 4) e un intervallo pari a 7;30° è, secondo Toomer[40], dimostrabile dalle poche conoscenze matematiche necessarie alla sua costruzione:

- l'unità di misura della circonferenza e del suo raggio sono il grado e il minuto;

- la circonferenza è divisa in 360 gradi formati da 60 primi ognuno, cioè 360x60'= 21.600'[41];

- fissando π = 3; 8, 30, valore utilizzato da Tolemeo nell'Almagesto V, 7 e probabilmente impiegato anche da Ipparco, segue 21.600'/ π = 6.876' che è il diametro della circonferenza, mentre 6.876' / 2 = 3.438' è il raggio (57;18)[42];

- dal valore del diametro si ricava immediatamente la crd(180°), dato che essa coincide con il diametro stesso;

- il raggio è il valore della crd(60°), poiché l'angolo di 60° individua un triangolo equilatero che ha tutti i lati uguali ad esso.

Da questi elementi di partenza è possibile ricavare i rimanenti valori della tavola (figura 3):

- la crd(90°) è la diagonale di un quadrato il cui lato è il raggio della circonferenza[43];

- la crd(180°- α) è data, per il teorema di Pitagora, dalla differenza dei quadrati del diametro e della crd(α);

- la crd(α/2) è calcolabile attraverso la stessa formula utilizzata da Tolemeo[44].

I possibili passaggi per la costruzione dei valori sono stati riassunti da Toomer [22] nel seguente schema (tabella 5), in cui le frecce orizzontali indicano l'uso della crd(180°- α), quelle verticali della crd(α/2).

7. Menelao e la trigonometria sferica

Da quanto scritto da Teone di Alessandria risulta che anche Menelao[45] scrisse un trattato sulle corde[46]. Molto più importante e interessante è la sua opera in tre libri, Sphaerica[47], in cui compare la geometria della sfera e che attesta il passaggio delle teorie trigonometriche dal piano alla sfera[48]: grazie ad essa, Menelao è considerato il fondatore della trigonometria sferica, avendola separata dalla geometria della sfera e dall'astronomia.

Nel primo libro, dedicato alla geometria sferica, troviamo la prima definizione di triangolo sferico[49], definito come τρίπλευρον, cioè "tre lati", per distinguerlo dal triangolo piano detto τρίγωνον, "tre angoli". Dopo le definizioni 3, 4, 5, 6 che trattano degli angoli del triangolo sferico, seguono 35 proposizioni che analizzano le sue proprietà[50]: ad esempio, la proposizione 11 afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è più grande di 180°.

Il secondo libro tratta di astronomia, mentre il terzo libro è dedicato alla trigonometria sferica, la cui prima proposizione è il famoso teorema di Menelao[51], impiegato anticamente per la soluzione di un triangolo sferico (figura 4), che in notazione moderna afferma:

$$\sin P_1A \times \sin P_2B \times \sin P_3C = \sin P_1C \times \sin P_2A \times \sin P_3B$$

L'autore per dimostrarlo fa uso di un teorema simile ma che si applica al piano[52] e che dice in notazione moderna:

$$P_1A \times P_2B \times P_3C = P_1C \times P_2A \times P_3B$$

Dato che quest'ultimo teorema non viene dimostrato da Menelao, se ne può dedurre o che fosse già noto[53] oppure che fosse già stato dimostrato sempre da Menelao in un'altra sua opera.

8. Tolemeo

L'Almagesto I, 11 riporta quella che è la prima tavola trigonometrica esistente[54], la cui importanza è sottolineata anche dalla posizione che la dimostrazione della sua costruzione assume nell'opera (Almagesto I, 10): essa è posta subito dopo i primi capitoli che trattano della sfera celeste e della Terra[55].

La seguente figura 5 ripropone una parte della tavola dell'Almagesto (Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν, ovvero "Tavola delle corde nel cerchio"), divisa in tre colonne principali riportanti i valori nel sistema numerico alessandrino[56].

La prima colonna (περιφερειῶν, "archi") riporta gli angoli partendo da ½° fino a 180°, con un intervallo di ½ grado; la seconda colonna (εὐθειῶν, "corde") riporta i valori della corda del rispettivo angolo in parti, delle quali il diametro ne contiene 120; la terza colonna (ἑξηκοστῶν, "sessantesimi") riporta 1/30 della differenza tra due corde successive, valore da usare per calcolare la corda degli angoli non presenti nella tavola[57].

La costruzione della tavola segue vari passi[58]:

- la circonferenza ed il suo diametro sono divisi rispettivamente in 360 e 120 parti uguali o gradi (a loro volta le corde saranno espresse con le stesse parti del diametro e con frazioni sessagesimali di esse);
- per angoli particolari è possibile scrivere immediatamente il valore della rispettiva corda attraverso semplici conoscenze geometriche (l'idea di fondo è che la corda di questi angoli non è altro che il lato del poligono regolare[59] inscritto nella circonferenza[60]);
- calcolare le corde degli angoli attraverso la formula della crd(180°- α);
- l'utilizzo del teorema detto di Tolemeo;
- la formula per il calcolo della crd(α/2).

I primi valori che Tolemeo ricava sono la crd(36°), ovvero il lato del decagono inscritto, e successivamente la crd(72°), lato del pentagono inscritto[61]; poi ricava la crd(60°)[62], la crd(90°) e la crd(120°) (figura 6)[63].

La crd(108°) e la crd(144°) si ricavano per mezzo del teorema di Pitagora che permette di calcolare la crd(180°- α) come differenza dei quadrati del diametro e della crd(α)[64].

Per calcolare le corde dei successivi angoli, Tolemeo dimostra il teorema che porta il suo nome, in cui si afferma che il rettangolo costruito con le diagonali di un quadrilatero inscritto in un cerchio è uguale alla somma dei rettangoli costruiti con le coppie dei lati opposti (figura 7)[65].

Con esso si riesce, conoscendo la crd(α) e la crd(β), a calcolare la crd(α-β) e la crd(α+β) (figura 8).

L'ultimo passo consiste nel dimostrare come ricavare la crd(α/2) attraverso un teorema conosciuto già al tempo di Archimede, come ci dimostra la traduzione araba di Thābit ibn Qurra del trattato dell'ettagono dello stesso autore[68].

Infine, Tolemeo cerca il valore della crd(1°) per approssimazione[69] e quindi calcola la crd(1/2°).

Dall'insieme degli strumenti matematici impiegati da Tolemeo si ricava come molte parti della sua trigonometria non siano nuove, ma si basino su teorie precedenti (Euclide, Archimede, Aristarco, Ipparco)[70]; a lui si deve certamente una sintesi dei vari trattati, di una loro organizzazione, alla ricerca del numero minore di proposizioni necessarie alla costruzione della tavola delle corde. Resta però l'incertezza di quando e chi costruì per la prima volta la tavola delle corde.

Note

1 Da Erodiano (ca. 170-200 d.C.), grammatico e storico che per primo lo espose. Il nome sembra sia stato utilizzato per la prima volta da Woisin nella sua tesi De graecorum notis numeralibus, Lipsia 1886. Vedi [3] e [4].

2 La creazione di un sistema di numerazione fu molto spesso legata al problema della scrittura: i popoli che svilupparono una scrittura alfabetica all'inizio scrissero i numeri interamente con le lettere, quindi li rappresentarono con l'iniziale per impiegare, infine, solo una serie di lettere fondamentali. Al contrario le civiltà che non ebbero un alfabeto crearono alcuni simboli per rappresentare dei numeri di base e attraverso una loro combinazione scrissero tutti gli altri.

3 Il sistema era impiegato anche al di fuori dell'Attica, nonostante i simboli varino a seconda dell'alfabeto della regione. Ad esempio, nelle iscrizioni della Beozia si trova: o per 50, per 100 [3].

4 Uno dei primi vantaggi era la possibilità di rappresentare qualsiasi numero minore di 1.000 usando non più di tre simboli.

5 Si pensa però che fosse già in uso dal V sec. a.C., se non dall'VIII (per la datazione e la probabile invenzione a Mileto, in Asia Minore, vedi [4]): l'impiego di tre lettere arcaiche, il vau (o digamma o stigma), il koppa e il sampi (rispettivamente il 6, 90, 900), necessarie per rappresentare i 27 numeri del sistema alessandrino, dato che l'alfabeto ionico possiede solo 24 lettere, sembrerebbe dimostrare un suo sviluppo in un periodo in cui tali lettere erano ancora usate. Tale ipotesi lascia però aperta la questione dell'intervallo di cinque secoli trascorso prima della definitiva introduzione del sistema alessandrino, evidentemente più sintetico ed essenziale rispetto al precedente, che però si mantenne nelle epigrafi [5].

6 Ad esempio, 11 si scriveva ια, 22 κβ, 153 ρνγ. I numeri che utilizzavano più di un simbolo erano poi rappresentati seguendo l'ordine decrescente, tipico della Grecia Europea, al contrario delle iscrizioni dell'Asia Minore: ρνγ nel primo caso, γνρ nel secondo. In seguito la prima rappresentazione prevalse, probabilmente per l'influenza del sistema numerico romano [3].

7 Ad esempio, 8.888 poteva assumere la forma ,ηωπη o anche 'ηωπη o anche ηωπη.

8 Per i casi particolari come ä per il 10.000 o ,ä per il 10.000.000, vedi [1].

9 Ad esempio, possiamo trovare βM o Mβ per il 20.000, mentre in certi casi in cui non c'era ambiguità M era omessa.

10 Per una trattazione a grandi linee del problema delle frazioni nell'antichità, relativamente al mondo egizio, mesopotamico e indo-iranico, vedi [7] con ulteriore bibliografia. Vedi anche [8] e [9] ove la terminologia frazionaria, introdotto da Sethe, è ulteriormente perfezionata. Si devono infatti distinguere le frazioni dell'unità (Stammbrucke), da quelle "complementari" (Komplementenbrucke), come 2/3, rispetto alla frazioni cosiddette "miste" (Gemischtebrucke), ad esempio, 5/9.

11 Ad esempio, 1/3 era scritto γ' (l'espressione completa γ' μέρος ovvero τρίτον μέρος). Questo metodo si ritrova anche nell'Almagesto di Tolemeo [10].

[12] *Archimede scrive perciò L'δ' per indicare ½ + ¼, mentre Erone rappresenta 2/3 + 1/13 + 1/39 (ovvero 10/13) con ω' ιγ' λθ' [3].*

[13] *In certi casi si preferiva però rappresentare una frazione con la somma di frazioni unitarie: ad esempio, L'δ', ovvero ½ + ¼, indicava ¾.*

[14] *Le frazioni sessagesimali sfruttavano il sistema numerico babilonese (per una breve storia, vedi [11], [12], [4] e [13]) in cui l'unità era rappresentata da un cuneo verticale che era ripetuto e disposto in più linee per i numeri fino al 9, mentre un cuneo a forma di angolo indica il 10 e veniva ripetuto per le decine successive. Il sistema aveva la caratteristica di essere posizionale, cioè il 60 era raffigurato con lo stesso simbolo dell'unità: solo la posizione del cuneo indicava il valore: ad esempio, la sequenza 1 2 indicava $1{*}60^{n} + 2{*}60^{n-1}$ dove il valore dell'esponente n si capiva solamente dal contesto. Alla mancanza di un simbolo che indicasse l'assenza di un numero in qualsiasi posizione e che quindi aiutasse a leggere un numero come il seguente che poteva indicare sia 80 che 3.620, in quanto il primo cuneo verticale poteva essere letto come 60 o 60^2, si rimediò nel periodo seleucide con l'introduzione di due piccoli cunei posti orizzontalmente o in modo obliquo all'interno del numero.*

[15] *"Καθόλου μέντοι χρησόμεθα ταῖς τῶν ἀριθμῶν ἐφόδοις κατὰ τὸν τῆς ἑξηκοντάδος τρόπον διὰ τὸ δύσχρηστον τῶν μοριασμῶν ἔτι τε τοῖς πολυπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς ἀκολουθήσομεν τοῦ συνεγγίζοντος ἀεὶ καταστοχαζόμενοι" cioè "in generale (sicuramente) ci serviremo dei procedimenti di calcolo propri del metodo sessagesimale a causa della difficoltà delle divisioni in parti frazionali, e inoltre seguiremo le moltiplicazioni e le divisioni sempre mirando all'approssimazione". Almagesto, I, 10 e [14].*

[16] *Per la scrittura del sistema sessagesimale si usa separare la parte intera e la parte frazionaria con ";" mentre le cifre sessagesimali sono divise da ",".*

[17] *Naturalmente i numeri sessagesimali erano rappresentati secondo il sistema alessandrino. Per il segno dello zero, vedi [4].*

[18] *Per l'estrazione della radice quadrata, vedi [15] e [3].*

[19] *Per esempi di operazioni sulle frazioni e sui numeri in forma sessagesimale, vedi [6].*

[20] *Composto moderno del latino scientifico formato sul greco τρίγωνον, 'triangolo' e –μετρία, secondo elemento tipico delle moderne parole scientifiche derivato da μέτρον, ovvero 'misura, misurazione'. Fu impiegato per la prima volta da Bartholomäus Pitiscus (1561-1613) nel Thesaurus. La trigonometria piana studia le relazioni tra i lati e gli angoli del triangolo per poter definire in maniera numerica i valori di questi elementi. La trigonometria applicata alla geometria della sfera e ai triangoli sferici è definita invece sferica: il suo scopo, analogamente a quella del piano, è di fissare le relazioni metriche fra gli elementi di un triangolo sferico. Per una storia della trigonometria, vedi [16] e [17].*

[21] *Nei triangoli ottusangoli il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo ottuso e dalla proiezione dell'altro su esso.*

[22] *Nei triangoli acutangoli il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è minore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo acuto, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo acuto e dalla proiezione dell'altro su esso.*

[23] $c^2=a^2+b^2 - 2 {*}a{*} b{*}\cos\alpha$, *dove a, b, c sono i lati del triangolo e l'angolo α è compreso tra i lati a e b.*

[24] *Per una descrizione degli studi rivolti all'individuazione del primo compilatore di una tavola delle corde, vedi [22] e [23].*

[25] *Un decennio prima Gow [15], descrivendo la figura di Ipparco, scrive: "it is evident therefore that Hipparchus was the founder of trigonometry".*

[26] *"A la suite des recherches d'Archimède sur le rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre, des calculs, peut-être déjà entrepris par le géomètre de Syracuse, furent faits pour déterminer les cordes des différents arcs", [21]. Confronta anche [24].*

[27] *"Hipparque, trouvant ainsi le terrain préparé, calcula des tables plus exactes que toutes celles qui avaient été essayées avant lui, et auxquelles il donna la forme qui devint plus tard classique", [21].*

[28] Loria [25] sottolinea come "la creazione della trigonometria nell'antichità provenne dalla necessità di avere a propria disposizione una tavola delle lunghezze che hanno le corde di tutti gli archi multipli di una parte aliquota della circonferenza. Questo bisogno fu avvertito, se non prima, da Ipparco al quale si attribuisce un'opera in dodici libri sul calcolo delle corde di un circolo; per tal fatto ad Ipparco venne da molti attribuita l'invenzione della trigonometria, da molti, ma non da tutti".

[29] Dello stesso anno è l'articolo di Bond [26] che traccia la storia della trigonometria a partire da Talete di Mileto fino al XV secolo e che individua in Ipparco il fondatore della trigonometria.

[30] Per l'analisi delle tre fonti e per il brano della Metrica di Erone da cui Heath deduce che è l'opera sulle corde di Ipparco ad essere stata citata dall'autore greco, vedi [3] e [27].

[31] Anche Boyer [19] ha proposto la mancanza di tavole trigonometriche al tempo di Aristarco e durante la stesura della sua opera Sulla grandezza e sulla distanza del Sole e della Luna.

[32] Già Tannery [21] aveva sottolineato un legame tra trigonometria greca e indiana: "le Sûrya-Siddhānta nous présente un système au premier abord tout à fait différent. Cependant cet ouvrage, le plus ancien traité mathématique des Indous, porte des traces si marquées d'emprunts faits aux Grecs, que l'on est induit à soupçonner que la trigonométrie dont il y est fait usage n'a pas une autre origine". Neugebauer [28] ha sottolineato che la tavola delle corde di Ipparco non fu solo il punto di partenza della trigonometria greca, ma anche delle tavole indiane. Gli Indiani, partendo dalle corde, passarono alla "mezza corda", ovvero la moderna funzione trigonometrica seno: infatti, presa la crd(7;30°) di Ipparco e dimezzata, si ricava il seno dell'angolo di 3;45°, ovvero l'angolo fondamentale delle tavole indiane ([29], [30], [13]). L'intervallo delle tabelle indiane del seno, detto in arabo kardaǰa (dal sanscrito kramajyā "corda distesa"), era solitamente di 3;45°, diversamente dal mezzo grado di Tolemeo. Inoltre il valore per il raggio della circonferenza impiegata per il calcolo della "mezza corda" che spesso si trova nelle tavole indiane è di 3438', come quello impiegato da Ipparco [22]. Con la mediazione dell'astronomia islamica le tavole indiane (per il loro influsso sul mondo sasanide, vedi [31]) raggiunsero l'Europa Occidentale (per il primo testo bizantino che utilizza una tavola del seno, vedi [38] e [33]). La mediazione islamica fu anche responsabile del termine "seno": gli Indiani abbreviarono la parola che indicava il seno, jyārdha o ardhajyā, in jyā, che venne a sua volta tradotta in arabo con jiba. Potendosi leggere quest'ultima come jaib, ovvero "tasca", così fu tradotta nel latino sinus [16].

[33] "Je ne pense pas que la création des tables ait signifié quelque chose de fondamentalement nouveau dans le développement des mathématiques grecques", [23].

[34] In trigonometria si definiscono quattro funzioni, dette goniometriche: seno, coseno, tangente, cotangente, che variano in funzione di un angolo α posto al centro di un cerchio di raggio unitario (detto cerchio goniometrico).

[35] Per la descrizione dell'angolo nella geometria greca, vedi [23].

[36] Se poniamo il raggio uguale a 1 (cerchio goniometrico della trigonometria moderna), si può ricavare la relazione che lega la corda al seno: $crd(\alpha) = 2\ sen\ (\alpha/2)$ e viceversa $sen\ \alpha = \frac{1}{2}\ crd(2\alpha)$. Se invece viene definito un raggio di lunghezza R, le relazioni diventano $crd(\alpha) = 2\ R\ sen(\alpha/2)$ e $sen\ \alpha = crd(2\alpha)\ /2R$.

[37] Della vita di Ipparco purtroppo si sa poco e una delle principali fonti è proprio l'Almagesto di Tolemeo, vissuto circa tre secoli dopo la sua scomparsa, in cui troviamo un elenco delle osservazioni compiute dallo studioso tra il 161 e il 126 a.C. Il luogo della sua nascita fu Nicea in Bitinia, dato che su alcune monete dei regni di Antonino (138-161), Commodo (180-192), Marino (217), Alessandro Severo (222-235), Gallo (251-253) è sempre chiamato il "Niceno". Vedi [35], [36] e [37].

[38] Sulla notazione sessagesimale in cui quasi sicuramente era costruita, vedi [12].

[39] Ipparco avrebbe calcolato geometricamente questi angoli e ricavato per interpolazione i rimanenti [22].

[40] Per l'applicazione dei risultati ottenuti da Toomer all'astronomia di Ipparco, vedi [38].

[41] La circonferenza è divisa secondo il metodo adottato da Ipsicle di Alessandria (seconda metà del secondo secolo a.C.), seguendo il sistema babilonese, nel suo testo Sul sorgere delle stelle: l'eclittica è divisa in 360 parti [3].

[42] Si nota che la funzione seno è collegata alla corda di Ipparco tramite la formula sen α = crd (2α)/2x3.438

[43] Basta perciò la conoscenza del valore di $\sqrt{2}$. Il suo valore era stato calcolato dai Babilonesi con una buona approssimazione, grazie alla loro notazione frazionaria: 1,414213… in luogo di 1,414214… [18].

[44] $\sqrt{\frac{1}{2}(d^2 - d\sqrt{d^2 - crd(\alpha)^2})}$ Dove d rappresenta il diametro della circonferenza [22].

[45] Come per Ipparco, anche per Menelao si ricavano notizie dall'Almagesto VII, 3 che riporta una sua osservazione del 98 d.C. [39].

[46] Anche per il numero dei libri della sua opera si possono fare le medesime induzioni formulate nel caso di Ipparco [22].

[47] Per un'ampia descrizione del contenuto dell'opera, vedi [3], [10] e [18].

[48] "In the Almagest spherical trigonometry is based on a theorem of Menelaus (late first century of the Christian era), and there is no evidence for the existence of the trigonometry of the surface of the sphere before Menelaus", [36]. Confronta anche [4] e [40].

[49] Un triangolo sferico è l'area inclusa dagli archi di circoli massimi sulla sfera, soggetto alla restrizione che i lati del triangolo siano minori di un semicerchio.

[50] "Menelaus's object, so far as Book I is concerned, seems to have been to give the main propositions about spherical triangles corresponding to Euclid's propositions about plane triangles", [3].

[51] Nel Medio Evo era conosciuto con il nome di Regula sex quantitatum, a causa delle sei quantità variabili che prendeva in considerazione.

[52] Per la dimostrazione dei due teoremi, vedi [12], [10] e [35].

[53] Bulmer-Thomas [39] e Boyer [19] suppongono che il teorema di Menelao per il caso dei triangoli piani fosse già conosciuto da Euclide.

[54] In Almagesto I, 13 troviamo anche la dimostrazione dei due teoremi di Menelao che sono, secondo le parole di Halma [20], "d'un grand secours à Ptolémée pour la solution de ses problèmes de trigonométrie sphérique". Proprio la presenza all'interno di quest'opera della tavola delle corde e dei teoremi di Menelao fa dell'Almagesto per ora la più antica opera a noi giunta contenente entrambi i rami della trigonometria, quella piana e quella sferica, e la più antica che tratta di trigonometria.

[55] Eppure nell'indice dell'opera (Almagesto I, 2) questi capitoli non sono presentati, nonostante in Almagesto I, 9 Tolemeo scriva che ritenga necessario, prima di tutto, spiegare e dimostrare geometricamente il metodo di calcolo delle corde. Vedi [41].

[56] Sidoli ha sviluppato nel 1998 (versione 1.0) e successivamente nel 2003 (versione 1.1) un pacchetto da utilizzare in Mathematica (pacchetto software che integra un motore di calcolo numerico e simbolico, un sistema di elaborazione grafica, un linguaggio di programmazione e un sistema di documentazione) che contiene un insieme di funzioni per fare calcoli con la trigonometria di Tolemeo (http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/584/, accesso gennaio 2008). Le funzioni messe a disposizione dallo strumento di calcolo sono, ad esempio:
- ChordTable[angolo] che restituisce la sua corda;
- PtolemyForm[%] che permette di visualizzare un valore nel sistema sessagesimale;
- RightTriangleSide[angolo] che fornisce il lato opposto all'angolo dato in un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza la cui ipotenusa è 120;
- RightTriangleAngle[lato] funzione inversa della precedente.

[57] Per calcolare la corda di un angolo α non presente nella tabella si impiega la seguente formula
$crd(\alpha) = crd(\alpha_n) + (\alpha - \alpha_n) \times f(\alpha_n)$
con $\alpha_n < \alpha < \alpha_{n+½}$ e $f(\alpha_n) = 1/30\ [crd(\alpha_{n+½}) - crd(\alpha_n)]$, ovvero il valore riportato nella terza colonna. Ad esempio, tra la crd(2 ½°) e la crd(2°) la differenza è 0; 37,4, mentre la sua 30ª parte è 0; 1,2,48 (valore riportato nella terza colonna). Secondo la formula sopra espressa, se si vuole la crd(2;25°), bisogna aggiungere alla crd(2°) 25 volte il valore 0; 1,2,4. Vedi [3] e [10].

[58] Nel corso dei decenni il metodo per la costruzione della tavola delle corde è stato presentato e commentato da vari studiosi tra cui: [3], [12], [10], [35], [18] e [41].

[59] Un poligono si dice regolare quando ha tutti i lati e gli angoli uguali.

[60] *Se il poligono inscritto ha n lati, il lato risulta essere la crd(360°/n).*

[61] *Per questa dimostrazione sono necessarie due proposizioni degli Elementi di Euclide: XIII.9 (se si sommano il lato di un esagono e quello di un decagono equilateri, che siano iscritti nello stesso cerchio, la retta che ne risulta è divisa in estrema e media ragione, e la parte maggiore è il lato dell'esagono) e XIII.10 (se si inscrive in un cerchio un pentagono equilatero, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono equilateri che siano iscritti nello stesso cerchio).*

[62] *La corda si ottiene inscrivendo un esagono nella circonferenza: questo forma sei triangoli equilateri con tutti i lati uguali al raggio (di 60 parti) della circonferenza stessa.*

[63] *La crd(90°) è data dal lato del quadrato inscritto nel cerchio, mentre la crd(120°) dal prodotto di per il raggio. Per i valori di* $\sqrt{3}$ *e conosciuti da Tolemeo, vedi [35].*

[64] *Questo risultato è equivalente alla formula moderna che prende in considerazione i quadrati del seno e del coseno, ovvero* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ *(per la dimostrazione basta sostituire in* $crd(180°-\alpha)^2=120^2-crd(\alpha)^2$*, la relazione tra corda e seno, espressa da* $crd(\alpha)^2 = 120^2\, sen^2(\alpha/2)$ *).*

[65] *Secondo Pedersen [10] questo teorema, per il suo aspetto elementare, risale a un periodo precedente a quello di Tolemeo ed è stato solamente esposto e dimostrato nell'Almagesto. Alla stessa conclusione era arrivato Loria [25]: "è nostro convincimento che questa proposizione non appartenga a Tolemeo: si suole attribuirla a lui soltanto perché l'Almagesto è la prima opera in cui s'incontra; ma poiché Teone Alessandrino ne parla (ed. Halma, T. I, p. 187) circa nello stesso modo che adopera riguardo al teorema di Menelao (id. p. 232 e 238), è poco probabile che si tratti di una scoperta di Tolemeo". Diversamente Toomer [22]: "we are led irresistibly to the conclusion that the formulas for the chord of the sum and the chord of the difference (and presumably the theorem on which they are based) are the work of Ptolemy himself". Confronta anche [19], dove viene presentato un caso particolare del teorema di Tolemeo conosciuto già da Euclide.*

[66] $crd(\alpha-\beta)= BC$*, con* $crd(\alpha)= AC$ *e* $crd(\beta)= AB$*.*

[67] $crd(\alpha+\beta) = AC$*, con* $crd(\alpha)= AB$ *e* $crd(\beta)= BC$*.*

[68] *Sempre Toomer [22] a tal riguardo aggiunge che "it is surely significant that for the derivation of the chord of the half-angle Ptolemy did not use a method depending on Ptolemy's Theorem (though, as we have seen, his result can be simply derived from that theorem), but used instead one which was, demonstrably, known long before his own time. The obvious explanation for this anomaly is that this part of the geometrical basis of his trigonometry, and this alone, is taken over from his predecessors". Per la dimostrazione della dipendenza della* $crd(\alpha/2)$ *dal teorema di Tolemeo, vedi [22] e [35].*

[69] *Per questo metodo Tolemeo usa una proposizione già conosciuta da Aristarco. Vedi [3], [12] e [10].*

[70] *Szabo e Maula [23] si spingono più oltre, parlando di un intero genere scientifico letterario riguardante la costruzione delle tavole delle corde: "lorsqu'on a eu l'idée qu'il était plus commode de calculer d'avance les différentes cordes, que de recommencer les mêmes calculs pour chaque cas concret, la valeur de la plus grande corde, le diamètre, étant fixée une fois pour toutes, les tables de cordes devinrent pour ainsi dire un genre scientifico-littéraire. Il est probable que plusieurs savants se sont essayés à ce genre" e che "Ptolémée a lui aussi suivi les lois du genre".*

Summary

Trigonometry was born due to the need of ancient astronomy to calculate and to predict the movement of the heavenly bodies. However it is hard to know who the founder of this mathematical branch was: it is likely that its origins date back to Hipparchus of Nicaea who compiled the first table of chords, which are the forerunners of the modern trigonometric function "sine". Nevertheless the most ancient existing work on trigonometry is the *Almagest* of Ptolemy in which the author describes the mathematical steps that are necessary for the compilation of the table of chords. These steps are based on more ancient theories and for this reason one gets the impression that they could be the result of a preparatory study. This article is not only a brief survey of Greek trigonometry but it also analyzes the Greek numeration system, the sexagesimal fractions and the arithmetical operations which were used in the calculation of the chords.

Riassunto

La nascita della trigonometria è dovuta alla necessità degli astronomi antichi di calcolare i movimenti dei corpi celesti. Più arduo è stabilire il nome del fondatore della disciplina: è molto probabile che la sua origine risalga ad Ipparco di Nicea, al quale è attribuita la prima tavola delle corde, antesignane della moderna funzione trigonometrica "seno", anche se il più antico testo esistente che contiene calcoli trigonometrici è solo l'*Almagesto* di Tolemeo. Tuttavia le conoscenze matematiche necessarie alla costruzioni di tali tavole si basano su teorie più antiche e questo ha portato a credere che molto probabilmente esse siano il risultato finale di un lungo studio preparatorio. Questo articolo, oltre ad analizzare le principali proposizioni che sono alla base della trigonometria greca (compresa la trigonometria sferica esposta per la prima volta da Menelao), prende anche in considerazione il sistema greco di numerazione, le frazioni sessagesimali e le operazioni aritmetiche impiegate nella stesura e nel calcolo delle tavole.

Résumé

La naissance de la trigonométrie est due à la nécessité des astronomes anciens de calculer les mouvements des corps célestes. Il est plus dur d'établir le nom du fondateur de cette discipline: il est très probable que son origine remonte à Hipparque de Nicée, auquel est attribuée la première table des cordes, précurseurs de la moderne fonction trigonométrique "sinus", même si le plus ancien texte existant contenant des calculs trigonométriques n'est que l'*Almageste* de Ptolémée. Toutefois les connaissances mathématiques nécessaires à la construction de ces tables se basent sur des théories plus anciennes et ceci a amené à croire que, très probablement, elles sont le résultat final d'une longue étude préparatoire. Cet article, en plus d'analyser les principales propositions qui sont à la base de la trigonométrie grecque (y compris la trigonométrie sphérique exposée pour la première fois par Ménélas), fait aussi entrer en ligne de compte le système grec de numération, les fractions sexagésimales et les opérations arithmétiques employées dans la rédaction et le calcul des tables.

Zusammenfassung

Die Entstehung der Trigonometrie geht auf die Notwendigkeit der antiken Astronomen zurück, die Bewegungen der Himmelskörper zu berechnen. Schwieriger ist es, den Namen des Gründers dieser Disziplin festzustellen: Es ist sehr wahrscheinlich, dass ihr Ursprung auf Hipparchos von Nizäa zurückgeht, dem die erste Sehnentafel zugeschrieben wird, Vorläuferin der modernen trigonometrischen Funktion "Sinus", auch wenn der älteste existierende antike Text mit trigonometrischen Berechnungen erst der Almagest von Ptolemäus ist. Jedoch beruhen die mathematischen Kenntnisse, die für die Erstellung solcher Tafeln nötig waren, auf älteren Theorien; das lässt vermuten, dass sie sehr wahrscheinlich das Endergebnis einer langen vorbereitenden Forschung waren. Dieser Artikel analysiert nicht nur die wichtigsten Verhältnisgleichungen, die der griechischen

Trigonometrie zu Grunde liegen (einschließlich der sphärischen Trigonometrie, die erstmals von Menelaos dargelegt wurde), sondern befasst sich auch mit dem griechischen Zahlensystem, den Sexagesimalbrüchen und den arithmetischen Operationen, die zur Erstellung und Berechnung der Tafeln benutzt wurden.

Resumen

La trigonometría debe su nacimiento a la necesidad de los antiguos astrónomos de calcular los movimientos de los cuerpos celestes. Más difícil es establecer el nombre del fundador de la disciplina: es muy probable que su origen se remonte a Hiparco de Nicea, a quien se atribuye la primera tabla de cuerdas, precursora de la moderna función trigonométrica del “seno”, si bien el texto más antiguo conservado con cálculos trigonométricos es el *Almagesto* de Ptolomeo. Sin embargo, los conocimientos matemáticos necesarios para la construcción de dichas tablas se basan en teorías más antiguas, y esto ha llevado a creer que probablemente sean el resultado final de un largo estudio preparatorio. Este artículo, además de analizar las principales proposiciones sobre las que se sustenta la trigonometría griega (incluida la trigonometría esférica expuesta por vez primera por Menelao), toma también en consideración el sistema griego de numeración, las fracciones sexagesimales y las operaciones aritméticas utilizadas en la redacción y cálculo de las tablas.

Резюме

Тригонометрия появилась в связи с необходимостью древних астрономов вычислять движения небесных тел. Труднее определить имя основателя этого предмета: весьма вероятно, что его происхождение восходит к Гиппарху Никейскому, которому приписывают создание первой таблицы хорд, предшественницы современной тригонометрической функции "синус", хотя и древнейшим существующим текстом, содержащим тригонометрические расчеты, будет только Птолемеев *Альмагест*. Однако, необходимые для построения этих таблиц математические знания основываются на более древних теориях, и это заставило думать, что вероятно они и являются конечным результатом длительных подготовительных исследований. Эта статья не только анализирует основные утверждения, лежащие в основе греческой тригонометрии (включая сферическую тригонометрию, впервые изложенную Менелаем), но и рассматривает греческую систему нумерации, шестидесятеричные дроби и арифметические операции, используемые при составлении и расчете таблиц.